

CONTROL 1
CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES, 2015/2

Prof. J. Dávila, Aux: J. Marshall, S. Pérez

1. (a) (3 pts) Para la superficie S dada por $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, calcule

$$\iint_S \frac{x^2}{z} dA.$$

- (b) (3 pts) Calcular el flujo del campo

$$F(x, y, z) = (xy + e^{y^2}, y^2 + z, y - y^2 - 2)$$

a través de la superficie

$$x^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 2 - z.$$

2. (a) (3 pts) Use el teorema de Stokes para calcular la integral

$$\oint_{\Gamma} (\sin(x^2)dx + xy^2dy + xz^2dz)$$

donde Γ es la línea poligonal que une los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 0, 0)$.

- (b) (3 pts) Verifique que el campo

$$F(x, y, z) = \left(-2\cos(x)\sin(x)e^{\cos(x)^2}\sin(xz+y^2) + e^{\cos(x)^2}\cos(xz+y^2)z, \right. \\ \left. 2e^{\cos(x)^2}\cos(xz+y^2)y, e^{\cos(x)^2}\cos(xz+y^2)x \right)$$

es conservativo y calcule la integral

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\vec{r}$$

donde Γ tiene parametrización:

$$\gamma(t) = ((2 + \sin(20t))\sin(t), (2 + \sin(20t))\cos(t), \cos(20t)), \quad t \in [0, \pi].$$

3. (a) (2 pts) Use el teorema de Green para calcular el área de la región encerrada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y el eje x ($a > 0$).

- (b) (2 pts) Pruebe que si $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es C^2 entonces

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0.$$

- (c) (2 pts) Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo C^1 con $\nabla \cdot F = 0$ y definamos

$$A(x) = \int_0^1 F(tx) \times (tx) dt.$$

Pruebe que

$$\nabla \times A(x) = \int_0^1 (2tF(tx) + t^2 \frac{d}{dt} F(tx)) dt,$$

y deduzca que

$$\nabla \times A = F.$$

Sugerencia: derive bajo el signo integral y use la fórmula

$$\nabla \times (F \times G) = F \nabla \cdot G - G \nabla \cdot F + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$$

donde $(G \cdot \nabla)F = (G_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + G_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + G_3 \frac{\partial}{\partial x_3})F = G_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + G_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + G_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}$.

PAUTA CONTROL 1
CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES, 2015/2

Prof. J. Dávila, Aux: J. Marshall, S. Pérez

1. (a) Para la superficie S dada por $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, calcule

$$\iint_S \frac{x^2}{z} dA.$$

- (b) Calcular el flujo del campo

$$F(x, y, z) = (xy + e^{y^2}, y^2 + z, y - y^2 - 2)$$

a través de la superficie

$$x^2 + z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 2 - z.$$

Solución.

- (a) Parametrizamos S mediante

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tenemos

$$\varphi_r = (\cos \theta, \sin \theta, 2r)$$

$$\varphi_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0),$$

$$\begin{aligned} \varphi_r \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2r^2 \cos \theta i - 2r^2 \sin \theta j + kr \end{aligned}$$

y

$$\|\varphi_r \times \varphi_\theta\| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}$$

Así

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{x^2}{z} dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \theta)^2}{r^2} r \sqrt{4r^2 + 1} d\theta dr \\ &= \int_0^1 r \sqrt{4r^2 + 1} dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 r \sqrt{4r^2 + 1} dr &= \frac{2}{3} \frac{1}{8} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iint_S \frac{x^2}{z} dA = \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) \pi.$$

(b) Usaremos el teorema de Gauss:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} \, dA = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F$$

con

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 < 1, 0 < y < 2 - z\}.$$

Así $\partial\Omega$ contiene la superficie S . Más precisamente

$$\partial\Omega = S \cup S_1 \cup S_2$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 : \quad & x^2 + z^2 = 1, \quad y = 0 \\ S_2 : \quad & x^2 + z^2 = 1, \quad y = 2 - z. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \frac{\partial}{\partial x} (xy + e^{y^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial z} (y - y^2 - 2) \\ &= 3y. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot F = 3 \iiint_{\Omega} y \, dV.$$

Usaremos las siguientes coordenadas para calcular la integral:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 &< y < 2 - r \sin \theta. \end{aligned}$$

El elemento de volumen es

$$r \, dr \, d\theta \, dy.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F &= 3 \iiint_{\Omega} y \, dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2-r \sin \theta} y r \, dy \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 y^2 \Big|_0^{2-r \sin \theta} r \, dy \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r \sin \theta)^2 r \, dy \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r - 4r^2 \sin \theta + r^3 \sin^2 \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{4}{3} r^3 \sin \theta + \frac{1}{4} r^4 \sin^2 \theta \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{4}{3} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{4}{3} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left(4\pi + \frac{1}{4} \pi \right) \\ &= \frac{51\pi}{8}. \end{aligned}$$

Calculamos la integral sobre S_1 . En esta superficie la normal unitaria exterior es $\hat{n} = -j = (0, -1, 0)$. Sobre esta superficie

$$F \cdot \hat{n} = -z$$

y usando coordenadas polares en las variables x, z

$$\iint_{S_1} F \cdot \hat{n} = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sin \theta r \, d\theta dr = 0.$$

Calculamos la integral sobre S_2 . En esta superficie la normal unitaria exterior es $\hat{n} = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$. Sobre esta superficie

$$F \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (y^2 + z + y - y^2 - 2) = 0$$

luego

$$\iint_{S_2} F \cdot \hat{n} = 0.$$

Luego

$$\iint_S F \cdot \hat{n} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F = \frac{51\pi}{8}.$$

2. (a) (3 ptos) Use el teorema de Stokes para calcular la integral

$$\oint_{\Gamma} (\sin(x^2)dx + xy^2dy + xz^2dz)$$

donde Γ es la línea poligonal que une los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 0, 0)$.

- (b) (3 ptos) Verifique que el campo

$$F(x, y, z) = \left(-2 \cos(x) \sin(x) e^{\cos(x)^2} \sin(xz + y^2) + e^{\cos(x)^2} \cos(xz + y^2) z, \right. \\ \left. 2e^{\cos(x)^2} \cos(xz + y^2) y, e^{\cos(x)^2} \cos(xz + y^2) x \right)$$

es conservativo y calcule la integral

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\vec{r}$$

donde Γ tiene parametrización:

$$\gamma(t) = ((2 + \sin(20t)) \sin(t), (2 + \sin(20t)) \cos(t), \cos(20t)), \quad t \in [0, \pi].$$

Solución.

- (a) El campo a evaluar es $F(x, y, z) = \sin(x^2) \hat{i} + xy^2 \hat{j} + xz^2 \hat{k}$ el cual tiene rotor

$$\nabla \times F = -z^2 \hat{j} + y^2 \hat{k}.$$

Para aplicar el teorema de Stokes se necesita que el campo sea suficientemente diferenciable, lo cual F cumple, y una superficie S que que tenga frontera Γ y su normal coincida con la positividad de Γ . Sea S la superficie compuesta por la unión de S_1 y S_2 donde cada una esta definida por

$$S_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq x, z = 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : x = y, 0 \leq x \leq 1, 0 < z \leq x\}$$

Entonces $\partial S = \Gamma$ y por lo tanto usando el teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS \end{aligned}$$

Se realiza el cálculo de de estas integrales por separado. La superficie S_1 se parametriza como

$$\varphi_1(x, y) = x \hat{i} + y \hat{j} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$$

la normal de esta superficie es

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \hat{k}$$

que coincide con la orientación positiva de Γ (en caso de obtener una normal $-\hat{k}$ se multiplica el flujo por -1). Realizando el cálculo del flujo a través de S_1 se obtiene que

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS &= \int_0^1 \int_0^x y^2 \hat{k} \cdot \hat{k} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x y^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{y^3}{3} dx \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Para S_2 se considera la siguiente parametrización

$$\varphi_2(x, z) = x \hat{i} + x \hat{j} + z \hat{k} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x$$

la normal de esta superficie es

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = (\hat{i} + \hat{j}) \times \hat{k} = \hat{i} - \hat{j}$$

nuevamente esta normal coincide con la positividad de Γ y por lo tanto el flujo a través de S_2 es

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS &= \int_0^1 \int_0^x (-z^2 \hat{j} + x^2 \hat{k}) \cdot (\hat{i} - \hat{j}) dz dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x z^2 dz dx \\ &= \int_0^1 \frac{z^3}{3} dx \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Por lo tanto el trabajo realizado en Γ es $1/6$.

(b) Se puede calcular $\nabla \times F$ para probar que F es conservativo, sin embargo esto no ayuda mucho a la hora de realizar el cálculo del trabajo. En vez de calcular el rotor vamos a encontrar el potencial de F . Sea f el candidato a potencial de F , entonces de $\nabla f = F$ se obtienen 3 igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2 \cos(x) \sin(x) e^{\cos(x)^2} \sin(xz + y^2) + e^{\cos(x)^2} \cos(xz + y^2) z \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 e^{\cos(x)^2} \cos(xz + y^2) y \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= e^{\cos(x)^2} \cos(xz + y^2) x \end{aligned}$$

integrando la última igualdad se obtiene $f(x, y, z) = e^{\cos(x)^2} \sin(xz + y^2) + g(x, y)$ y derivando esta f en x e y se obtiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

así g es una constante que por comodidad supondremos 0. Entonces $f(x, y, z) = e^{\cos(x)^2} \sin(xz + y^2)$ es potencial de F pues $\nabla f = F$ lo que prueba que F es conservativa.

Para el cálculo del trabajo basta calcular el punto inicial y final de la curva

$$\gamma(\pi) = (0, -2, 1)$$

$$\gamma(0) = (0, 2, 1)$$

y entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot d\vec{r} &= f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) \\ &= f(0, -2, 1) - f(0, 2, 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Observaciones :

- (i) La curva γ NO es cerrada, quien haya concluido que el trabajo es nulo argumentando por curva cerrada tiene el resultado malo y por ende no tiene puntaje.
- (ii) Proponer un potencial f y mostrar que $\nabla f = F$ también es correcto.

■